

N° D'ORDRE :
1836.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Henri KREBS,

Licencié ès Sciences Mathématiques.

1^{re} THÈSE. — SUR DEUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

2^e THÈSE. — SUR LA THÉORIE DU RÉGLAGE EN HORLOGERIE.

Soutenues le 5 mai 1925, devant la Commission d'Examen.

MM. E. GOURSAT, *Président.*

CARTAN,
MONTEL, } *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1925

N° D'ORDRE :
1836..

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Henri KREBS,
Licencié ès Sciences Mathématiques.

1^{re} THÈSE. — SUR DEUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

2^e THÈSE. — SUR LA THÉORIE DU RÉGLAGE EN HORLOGERIE.

Soutenues le 5 mai 1925, devant la Commission d'Examen.

MM. E. GOURSAT, *Président.*
CARTAN,
MONTEL, } *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1925

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen..... MOLLIARD Professeur. Physiologie végétale.
Doyen honoraire..... P. APPELL.
Professeurs honoraires. P. PUISEUX, VÉLAIN, BOUSSINESQ, HALLER, JOANNIS.



Professeurs

ÉMILE PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre sup.
KÉNIGS.....	Mécanique phys. et expérimentale.
GOURSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
JANET.....	Electrotechnique générale.
WALLERANT.....	Minéralogie.
ANDOYER.....	Astronomie.
PAINLEVÉ.....	Mécanique analytique et céleste.
HAUG.....	Géologie.
LE CHATELIER.....	Chimie générale.
GABRIEL BERTRAND...	Chimie biologique.
M ^{me} P. CURIE.....	Physique générale et radioactivité.
CAULLERY.....	Zool. (Evolution des êtres organisés).
C. CHABRIE.....	Chimie appliquée.
G. URBAIN.....	Chimie minérale.
ÉMILE BOREL.....	Calcul des probab. et Phys.math.
MARCHIS.....	Aviation.
JEAN PERRIN.....	Chimie physique.
ABRAHAM.....	Physique.
CARTAN.....	Géométrie supérieure.
LAPICQUE.....	Physiologie.
GENTIL.....	Géographie physique.
VESSIOT.....	Théorie des groupes et calcul des var.
COTTON.....	Physique générale.
DRACH.....	Applicat. del'Analyse à la Géométrie.
C. FABRY.....	Physique.
CHARLES PEREZ.....	Zoologie.
LEDUC.....	Physique théorique et Phys. céleste.
LÉON BERTRAND.....	Géologie appliquée et Géol. région.
LESPIEAU.....	Théories chimiques.
RABAUD.....	Biologie expérimentale.
PORTIER.....	Physiologie comparée.
BLAISE.....	Chimie organique.
P.-A. DANGEARD.....	Botanique.
MAURAIN.....	Physique du globe.
MONTEL.....	Mécanique rationnelle.
WINTREBERT.....	Anatomie et histologie comparées.
DUBOSQ.....	Biologie maritime.
TIFFENEAU.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
N.....	Mathématiques générales.
HEROUARD.....	Zoologie.
RÉMY PERRIER.....	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
SAGNAC.....	Physique théorique et Phys. céleste.
PÉCHARD.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
AUGER.....	Chimie analytique.
M. GUICHARD.....	Chimie minérale.
GUILLET.....	Physique.
JULIA.....	Mathématiques générales.
MAUGUIN.....	Minéralogie.
BLARINGHEM.....	Botanique.
MICHEL-LEVY.....	Pétrographie.

Secrétaire..... D. TOMBECK.

SECONDE THÈSE

SUR LA

THÉORIE DU RÉGLAGE EN HORLOGERIE

Nous étudierons l'effet du fonctionnement d'un balancier non équilibré sur la durée des oscillations dans la position verticale d'une montre. Nous supposerons dans une première Partie que le centre de gravité du balancier à l'état de repos se trouve sur la verticale qui passe par son axe, et dans une seconde Partie nous considérerons le cas où le centre de gravité ne se trouve pas sur la verticale.

PREMIÈRE PARTIE

1. Si l'on désigne par A le moment d'inertie du balancier de poids P , par M une constante, on a, si le balancier est équilibré, c'est-à-dire si le centre de gravité est sur l'axe,

$$(1) \quad A \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = - M \alpha.$$

On en déduit

$$A \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = - M \alpha^2 + C.$$

Si l'on suppose que pour $t = 0$, on ait $\alpha = \alpha_0$, $\frac{d\alpha}{dt} = 0$, on a

$$(2) \quad A \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = M (\alpha_0^2 - \alpha^2).$$

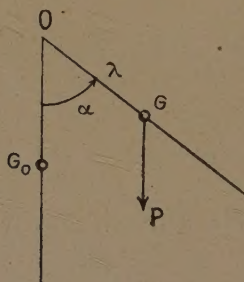
La durée d'une oscillation simple est donc

$$(3) \quad \begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{A}{M}} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}, \\ T &= \pi \sqrt{\frac{A}{M}}. \end{aligned}$$

2. Si l'on suppose que le centre de gravité n'est pas sur l'axe (*fig. 1*), mais à une distance λ de celui-ci, et qu'il se trouve sur la verticale passant par le centre lorsque le balancier est à l'état de repos, on a, en négligeant les frottements,

$$(4) \quad A \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -M\alpha - P\lambda \sin \alpha.$$

Fig. 1.



On en déduit

$$A \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = -M\alpha^2 + 2P\lambda \cos \alpha + C.$$

Si l'on suppose que pour $t = 0$, on ait $\alpha = \alpha_0$, $\frac{d\alpha}{dt} = 0$, on a

$$(5) \quad A \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = M(\alpha_0^2 - \alpha^2) + 2P\lambda (\cos \alpha - \cos \alpha_0).$$

La vitesse est aussi nulle pour $\alpha = -\alpha_0$. La durée d'une oscillation simple est donc donnée par la formule

$$(6) \quad T = \sqrt{\frac{A}{M}} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2 + \frac{2P\lambda}{M} (\cos \alpha - \cos \alpha_0)}}.$$

Cette intégrale, qui joue un rôle important dans la théorie du réglage, a été calculée pour la première fois par Ed. Phillips à la demande de M. Jules Grosmann, directeur de l'École d'Horlogerie du Locle. Ed. Phillips n'avait donné que le résultat. Dans un

premier travail, publié dans l'« Horlogerie théorique », de MM. Jules Grosmann et Hermann Grosmann, nous avons exposé une méthode pour calculer cette intégrale (vol. II, p. 415).

Nous avons posé, le facteur $\frac{P\lambda}{M}$ étant supposé très petit,

$$(7) \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2 + 2\varepsilon(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}} \\ = \frac{A}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} + (B + C\alpha^2 + D\alpha^4 + \dots) \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}, \\ \varepsilon = \frac{P\lambda}{M}.$$

Nous avons déterminé les coefficients de proche en proche. Nous avons obtenu les formules suivantes :

$$A = \sqrt{\frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \varepsilon \sin \alpha_0}}, \\ B = \frac{1}{\alpha_0^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 - 2\varepsilon \cos \alpha_0 + 2\varepsilon}} - A \right), \\ C = \frac{1}{2(A + B\alpha_0^2)} \left\{ B^2 + \frac{\left\{ A^2(1 + \varepsilon) - 1 + (2A + B\alpha_0^2)B \right.}{\alpha_0^2(\alpha_0^2 - 2\varepsilon \cos \alpha_0 + 2\varepsilon)} \right. \\ \left. \times [\alpha_0^2 - 2\varepsilon \cos \alpha_0 + 2\varepsilon + \alpha_0^2(1 + \varepsilon)] \right\}, \\ D = \frac{1}{2(A + B\alpha_0^2)} \left\{ 2BC + \frac{\left\{ -A^2 \frac{2\varepsilon}{4!} - \left(1 + \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{4!} \alpha_0^2 \right) (2A + B\alpha_0^2)B \right.}{\alpha_0^2(\alpha_0^2 - 2\varepsilon \cos \alpha_0 + 2\varepsilon)} \right. \\ \left. + [\alpha_0^2 - 2\varepsilon \cos \alpha_0 + 2\varepsilon + \alpha_0^2(1 + \varepsilon)] \right. \\ \left. \times [2C(A + B\alpha_0^2) - B^2] \right\},$$

En développant ces valeurs en série par rapport à ε et à α_0^2 , et en négligeant les puissances supérieures de ε à partir de la deuxième, ε étant très petit dans le cas d'un balancier bien fait, on obtient les expressions

$$A = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{1}{3!} \alpha_0^2 + \frac{1}{5!} \alpha_0^4 - \frac{1}{7!} \alpha_0^6 + \dots \right), \\ B = \varepsilon \left(-\frac{1}{4!} + \frac{2}{6!} \alpha_0^2 - \frac{3}{8!} \alpha_0^4 + \frac{4}{10!} \alpha_0^6 - \dots \right), \\ C = \varepsilon \left(\frac{1}{6!} - \frac{2}{8!} \alpha_0^2 + \frac{3}{10!} \alpha_0^4 - \frac{4}{12!} \alpha_0^6 + \dots \right), \\ D = \varepsilon \left(-\frac{1}{8!} + \frac{2}{10!} \alpha_0^2 - \frac{3}{12!} \alpha_0^4 + \frac{4}{14!} \alpha_0^6 - \dots \right),$$

On a aussi

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} x^{2n} \sqrt{\alpha_0^2 - x^2} dx = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n+2)} \pi \alpha_0^{2n+2}.$$

La substitution de ces valeurs dans la formule (7) et l'intégration de cette expression entre les valeurs $-\alpha_0$ et α_0 nous donne la durée d'une oscillation simple, ainsi qu'elle résulte de la formule (6),

$$(8) \quad T = \pi \sqrt{\frac{A}{M}} \left\{ 1 - \frac{P\lambda}{M} \left[\frac{1}{2} - \frac{\alpha_0^2}{2^3.2(1)^2} + \frac{\alpha_0^4}{2^5.3(1.2)^2} - \frac{\alpha_0^6}{2^7.4(1.2.3)^2} \right] \right\}.$$

3. La méthode précédente pour calculer une valeur approchée de la durée d'une oscillation simple donnée par la formule (6) ne donne pas des calculs particulièrement simples. Nous avons cherché des méthodes plus simples pour obtenir la formule (8). Nous allons en exposer deux.

4. Nous considérons l'expression

$$(9) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 - x^2 + 2\varepsilon(\cos x - \cos \alpha_0)}}.$$

Le coefficient ε étant très petit, nous développerons cette expression suivant les puissances croissantes de ε . Nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 - x^2 + 2\varepsilon(\cos x - \cos \alpha_0)}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 - x^2}} \left[1 + 2\varepsilon \left(\frac{\cos x - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2 - x^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Nous pouvons donc écrire

$$(10) \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 - x^2 + 2\varepsilon(\cos x - \cos \alpha_0)}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 - x^2}} \left[1 - \varepsilon \left(\frac{\cos x - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2 - x^2} \right) + \frac{1.3}{1.2} \varepsilon^2 \left(\frac{\cos x - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2 - x^2} \right)^2 - \frac{1.3.5}{1.2.3} \varepsilon^3 \left(\frac{\cos x - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2 - x^2} \right)^3 + \dots + (-1)^n \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{1.2 \dots n} \varepsilon^n \left(\frac{\cos x - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2 - x^2} \right)^n + \dots \right].$$

Nous négligerons les termes contenant ε à partir de la deuxième

puissance. La valeur de la fonction $f(\alpha)$ est alors

$$(11) \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2 + 2\varepsilon(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} \left[1 - \varepsilon \left(\frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2 - \alpha^2} \right) \right].$$

Les séries qui représentent les fonctions $\cos \alpha$ et $\cos \alpha_0$ étant toujours convergentes, la différence $\cos \alpha - \cos \alpha_0$ est une série double, dans laquelle on peut grouper les termes d'une manière quelconque. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \cos \alpha_0 &= \frac{1}{2!}(\alpha_0^2 - \alpha^2) - \frac{1}{4!}(\alpha_0^4 - \alpha^4) + \frac{1}{6!}(\alpha_0^6 - \alpha^6) - \dots \\ &\quad + (-1)^n \frac{1}{2(n+1)!}(\alpha_0^{2(n+1)} - \alpha^{2(n+1)}) + \dots \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2 - \alpha^2} &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}(\alpha_0^2 + \alpha^2) + \frac{1}{6!}(\alpha_0^4 + \alpha_0^2 \alpha^2 + \alpha^4) - \dots \\ &\quad + (-1)^n \frac{1}{2(n+1)!}(\alpha_0^{2n} + \alpha_0^{2(n-1)} \alpha^2 + \dots + \alpha^{2n}) + \dots \end{aligned}$$

Nous ordonnons des termes suivant les puissances croissantes de α^2 . On obtient la série convergente quelle que soit la valeur de α , puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$,

$$\begin{aligned} (12) \quad \frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2 - \alpha^2} &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} \alpha_0^2 + \frac{1}{6!} \alpha_0^4 - \frac{1}{8!} \alpha_0^6 + \frac{1}{10!} \alpha_0^8 - \dots + (-1)^n \frac{1}{2(n+1)!} \alpha_0^{2n} + \dots \\ &\quad - \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} \alpha_0^2 + \frac{1}{8!} \alpha_0^4 - \frac{1}{10!} \alpha_0^6 + \dots + (-1)^n \frac{1}{2(n+1)!} \alpha_0^{2(n-1)} + \dots \right) \alpha^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{6!} - \frac{1}{8!} \alpha_0^2 + \frac{1}{10!} \alpha_0^4 - \dots + (-1)^n \frac{1}{2(n+1)!} \alpha_0^{2(n-2)} + \dots \right) \alpha^4 \\ &\quad - \left(\frac{1}{8!} - \frac{1}{10!} \alpha_0^2 + \dots + (-1)^n \frac{1}{2(n+1)!} \alpha_0^{2(n-3)} + \dots \right) \alpha^6 \\ &\quad + \left(\frac{1}{10!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2(n+1)!} \alpha_0^{2(n-4)} + \dots \right) \alpha^8 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (-1)^n \left(\frac{1}{2(n+1)!} - \dots \right) \alpha^{2n} \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Nous remplaçons dans la relation (11) $\frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2 - \alpha^2}$ par cette

valeur et nous portons le résultat obtenu dans la formule (6).
Nous obtenons pour la durée d'une oscillation simple la valeur

$$(13) \quad T = \sqrt{\frac{A}{M}} \left[\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} \alpha_0^2 + \frac{1}{6!} \alpha_0^4 - \frac{1}{8!} \alpha_0^6 + \frac{1}{10!} \alpha_0^8 - \dots + (-1)^n \frac{1}{2(n+1)!} \alpha_0^{2n} \right) \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{dx}{\sqrt{\alpha_0^2 - x^2}} \right. \\
- \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} \alpha_0^2 + \frac{1}{8!} \alpha_0^4 - \frac{1}{10!} \alpha_0^6 + \dots + (-1)^n \frac{1}{2(n+1)!} \alpha_0^{2(n-1)} + \dots \right) \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{\alpha^2 dx}{\sqrt{\alpha_0^2 - x^2}} \\
+ \left(\frac{1}{6!} - \frac{1}{8!} \alpha_0^2 + \frac{1}{10!} \alpha_0^4 - \dots + (-1)^n \frac{1}{2(n+1)!} \alpha_0^{2(n-2)} + \dots \right) \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{\alpha^4 dx}{\sqrt{\alpha_0^2 - x^2}} \\
- \left(\frac{1}{8!} - \frac{1}{10!} \alpha_0^2 + \dots + (-1)^n \frac{1}{2(n+1)!} \alpha_0^{2(n-3)} + \dots \right) \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{\alpha^6 dx}{\sqrt{\alpha_0^2 - x^2}} \\
+ \left(\frac{1}{10!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2(n+1)!} \alpha_0^{2(n-4)} + \dots \right) \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{\alpha^8 dx}{\sqrt{\alpha_0^2 - x^2}} \\
+ \dots \\
+ (-1)^n \left(\frac{1}{2(n+1)!} + \dots \right) \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{\alpha^{2n} dx}{\sqrt{\alpha_0^2 - x^2}} \\
+ \dots \left. \right]$$

Si l'on pose

$$\alpha = \alpha_0 \sin \varphi,$$

on a

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{\alpha^{2n} d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} = \alpha_0^{2n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi, \\
\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{\alpha^{2n} d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \pi \alpha_0^{2n}.$$

La formule (13) devient

$$T = \pi \sqrt{\frac{A}{M}} \left\{ 1 - \frac{P\lambda}{M} \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} \alpha_0^2 + \frac{1}{6!} \alpha_0^4 - \frac{1}{8!} \alpha_0^6 + \frac{1}{10!} \alpha_0^8 - \dots + (-1)^n \frac{1}{2(n+1)!} \alpha_0^{2n} + \dots \right. \right. \\
- \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} \alpha_0^2 + \frac{1}{8!} \alpha_0^4 - \frac{1}{10!} \alpha_0^6 + \dots + (-1)^n \frac{1}{2(n+1)!} \alpha_0^{2(n-1)} + \dots \right) \alpha_0^2 \\
+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{1}{6!} - \frac{1}{8!} \alpha_0^2 + \frac{1}{10!} \alpha_0^4 - \dots + (-1)^n \frac{1}{2(n+1)!} \alpha_0^{2(n-2)} + \dots \right) \alpha_0^4 \\
- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{1}{10!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2(n+1)!} \alpha_0^{2(n-3)} + \dots \right) \alpha_0^6 \\
+ \dots \\
\left. + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \left(\frac{1}{2(n+1)!} + \dots \right) \alpha_0^{2n} + \dots \right\}$$

Nous ordonnons par rapport aux puissances de α_0^2 . Nous obtenons

$$(14) \quad T = \pi \sqrt{\frac{A}{M}} \left\{ 1 - \frac{P\lambda}{M} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \alpha_0^2 + \frac{1}{64} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} \right) \alpha_0^4 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{8!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \right) \alpha_0^6 + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^n \frac{1}{(2n+2)!} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \dots \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \right) \alpha_0^{2n} + \dots \right] \right\}.$$

On a d'ailleurs la relation

$$(15) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} = \frac{1.3.5 \dots (2n+1)}{2.4.6 \dots 2n}.$$

La formule (14) nous donne donc la valeur cherchée

$$T = \pi \sqrt{\frac{A}{M}} \left\{ 1 - \frac{P\lambda}{M} \left[\frac{1}{2} - \frac{\alpha_0^2}{2^3.2(1)^2} + \frac{\alpha_0^4}{2^5.3(1.2)^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\alpha_0^6}{2^7.4(1.2.3)^2} \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^n \frac{\alpha_0^{2n}}{2^{2n+1}(n+1)(1.2 \dots n)^2} + \dots \right] \right\}.$$

5. Nous allons donner une autre méthode pour calculer la formule de Ed. Phillips.

Nous développerons en série en appliquant la formule de Maclaurin la fonction

$$f(x) = \frac{\cos x - \cos x_0}{x_0^2 - x^2}.$$

La fonction est paire. Nous avons donc un développement de la forme

$$(16) \quad \frac{\cos x - \cos x_0}{x_0^2 - x^2} = \frac{1 - \cos x_0}{x_0^2} + \frac{1}{1.2} \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\cos x - \cos x_0}{x_0^2 - x^2} \right) \right]_{x=0} x^2 + \dots \\ - \frac{1}{2.n!} \left[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \left(\frac{\cos x - \cos x_0}{x_0^2 - x^2} \right) \right]_{x=0} x^{2n} + \dots$$

Si nous écrivons la fraction sous la forme d'un produit, nous

avons à calculer les dérivées successives du produit

$$(\cos \alpha - \cos \alpha_0) \left(\frac{1}{\alpha_0^2 - \alpha^2} \right).$$

Nous avons d'une manière générale

$$\begin{aligned} (17) \quad & \left[\frac{d^{2n}}{d\alpha^{2n}} \left(\frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2 - \alpha^2} \right) \right]_{\alpha=0} \\ &= \left[\frac{d^{2n}}{d\alpha^{2n}} (\cos \alpha - \cos \alpha_0) \right]_{\alpha=0} \left[\frac{1}{\alpha_0^2 - \alpha^2} \right]_{\alpha=0} \\ &+ \frac{2n}{1} \left[\frac{d^{2n-1}}{d\alpha^{2n-1}} (\cos \alpha - \cos \alpha_0) \right]_{\alpha=0} \left[\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\alpha_0^2 - \alpha^2} \right) \right]_{\alpha=0} \\ &+ \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} \left[\frac{d^{2n-2}}{d\alpha^{2n-2}} (\cos \alpha - \cos \alpha_0) \right]_{\alpha=0} \left[\frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\frac{1}{\alpha_0^2 - \alpha^2} \right) \right]_{\alpha=0} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{2n \dots (2n-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m} \\ &\quad \times \left[\frac{d^{2n-m}}{d\alpha^{2n-m}} (\cos \alpha - \cos \alpha_0) \right]_{\alpha=0} \left[\frac{d^m}{d\alpha^m} \left(\frac{1}{\alpha_0^2 - \alpha^2} \right) \right]_{\alpha=0} \\ &+ \dots \\ &+ [\cos \alpha - \cos \alpha_0]_{\alpha=0} \left[\frac{d^{2n}}{d\alpha^{2n}} \left(\frac{1}{\cos \alpha - \cos \alpha_0} \right) \right]_{\alpha=0} \end{aligned}$$

Nous avons

$$(18) \quad \frac{d^n}{d\alpha^n} (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = \cos \left(\alpha + n \frac{\pi}{2} \right).$$

La valeur des dérivées d'ordre impair est nulle pour $\alpha = 0$. Celle des dérivées d'ordre pair est donnée par la formule

$$(19) \quad \left[\frac{d^{2n}}{d\alpha^{2n}} (\cos \alpha - \cos \alpha_0) \right]_{\alpha=0} = (-1)^n.$$

Nous obtiendrons facilement les dérivées du second facteur de la manière suivante. Nous poserons

$$u = \frac{1}{\alpha_0^2 - \alpha^2}.$$

Nous pouvons écrire cette relation de la manière suivante

$$(\alpha_0^2 - \alpha^2) u = 1.$$

La dérivée d'ordre n de cette relation est

$$(\alpha_0^2 - \alpha^2) u^{(n)} - 2n\alpha u^{(n-1)} - n(n-1) u^{(n-2)} = 0.$$

Nous avons donc la formule de récurrence

$$(20) \quad u^{(n)} = \frac{n}{\alpha_0^2 - \alpha^2} [2\alpha u^{(n-1)} + (n-1) u^{(n-2)}].$$

Nous pouvons donc obtenir successivement toutes les dérivées de $\frac{1}{\alpha_0^2 - \alpha^2}$ à partir de cette expression et de sa dérivée $\frac{2\alpha}{(\alpha_0^2 - \alpha^2)^2}$. Le calcul se simplifie notablement si nous remarquons qu'il nous faut la valeur des dérivées de $\frac{1}{\alpha_0^2 - \alpha^2}$ pour $\alpha = 0$ pour former la relation (17). Si nous faisons dans la relation (20) $\alpha = 0$, et que nous cherchions la valeur des dérivées d'ordre pair, celles d'ordre impair étant égales à zéro, puisque $\frac{1}{\alpha_0^2 - \alpha^2}$ est une fonction paire, on obtient la relation

$$(21) \quad \left[\frac{d^{2n}}{d\alpha^{2n}} \left(\frac{1}{\alpha_0^2 - \alpha^2} \right) \right]_{\alpha=0} = \frac{2n(2n-1)}{\alpha_0^2} \left[\frac{d^{2(n-1)}}{d\alpha^{2(n-1)}} \left(\frac{1}{\alpha_0^2 - \alpha^2} \right) \right]_{\alpha=0}.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\alpha_0^2 - \alpha^2} \right)_{\alpha=0} &= \frac{1}{\alpha_0^2}, \\ \left[\frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\frac{1}{\alpha_0^2 - \alpha^2} \right) \right]_{\alpha=0} &= \frac{2!}{\alpha_0^4}, \\ \left[\frac{d^4}{d\alpha^4} \left(\frac{1}{\alpha_0^2 - \alpha^2} \right) \right]_{\alpha=0} &= \frac{4!}{\alpha_0^6}, \\ \left[\frac{d^6}{d\alpha^6} \left(\frac{1}{\alpha_0^2 - \alpha^2} \right) \right]_{\alpha=0} &= \frac{6!}{\alpha_0^8}, \\ &\dots\dots\dots \\ \left[\frac{d^{2n}}{d\alpha^{2n}} \left(\frac{1}{\alpha_0^2 - \alpha^2} \right) \right]_{\alpha=0} &= \frac{2n!}{\alpha_0^{2(n+1)}}. \end{aligned}$$

La formule (17) nous donne, si l'on remplace les dérivées de $(\cos \alpha - \cos \alpha_0)$ et de $\frac{1}{\alpha_0^2 - \alpha^2}$ par leurs valeurs pour $\alpha = 0$,

$$\begin{aligned} &\left[\frac{d^{2n}}{d\alpha^{2n}} \left(\frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2 - \alpha^2} \right) \right] \\ &= (-1)^n \frac{1}{\alpha_0^2} + (-1)^{n-1} \frac{2n(2n-1)}{\alpha_0^4} \\ &\quad + (-1)^{n-2} \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{\alpha_0^6} + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-m} \frac{2n(2n-1)\dots(2n-2m+1)}{\alpha_0^{2(m+1)}} + \dots - \frac{2n\dots 3}{\alpha_0^{2n}} \\ &\quad + (1 - \cos \alpha_0) \frac{2n!}{\alpha_0^{2(n+1)}}. \end{aligned}$$

Nous remplaçons $\cos \alpha_0$ par son développement en série et nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^{2n}}{d\alpha^{2n}} \left(\frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2 - \alpha^2} \right) \right]_{\alpha=0} \\ &= (-1)^n \frac{1}{\alpha_0^2} + (-1)^{n-1} \frac{2n(2n-1)}{\alpha_0^4} \\ &+ (-1)^{n-2} \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{\alpha_0^6} + \dots \\ &+ (-1)^{n-m} \frac{2n(2n-1)\dots(2n-2m+1)}{\alpha_0^{2(m+1)}} + \dots + \frac{2n\dots 3}{\alpha_0^{2n}} \\ &+ \frac{2n\dots 3}{\alpha_0^{2n}} - \frac{2n\dots 5}{\alpha_0^{2(n-1)}} + \dots + (-1)^{n-m+1} \frac{2n(2n-1)\dots(2n-2m+1)}{\alpha_0^{2(m+1)}} \\ &+ (-1)^n 2n! \left[\frac{1}{2(n+1)!} - \frac{1}{2(n+2)!} \alpha_0^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Nous avons donc la formule

$$\begin{aligned} (22) \quad & \left[\frac{d^{2n}}{d\alpha^{2n}} \left(\frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2 - \alpha^2} \right) \right]_{\alpha=0} \\ &= (-1)^n 2n! \left[\frac{1}{2(n+1)!} - \frac{1}{2(n+2)!} \alpha_0^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Les valeurs des dérivées successives de la fonction $\frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2 - \alpha^2}$ pour $\alpha = 0$ sont donc

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2 - \alpha^2} \right) \right]_{\alpha=0} &= -2! \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} \alpha_0^2 + \frac{1}{8!} \alpha_0^4 - \frac{1}{10!} \alpha_0^6 + \dots \right), \\ \left[\frac{d^4}{d\alpha^4} \left(\frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2 - \alpha^2} \right) \right]_{\alpha=0} &= 4! \left(\frac{1}{6!} - \frac{1}{8!} \alpha_0^2 + \frac{1}{10!} \alpha_0^4 - \frac{1}{12!} \alpha_0^6 + \dots \right), \\ &\dots \end{aligned}$$

La formule (16) nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2 - \alpha^2} &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} \alpha_0^2 + \frac{1}{6!} \alpha_0^4 - \frac{1}{8!} \alpha_0^6 + \frac{1}{10!} \alpha_0^8 - \dots + (-1)^n \frac{1}{2(n+1)!} \alpha_0^{2n} + \dots \\ &- \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} \alpha_0^2 + \frac{1}{8!} \alpha_0^4 - \frac{1}{10!} \alpha_0^6 + \dots \right) \alpha^2 \\ &+ \left(\frac{1}{6!} - \frac{1}{8!} \alpha_0^2 + \frac{1}{10!} \alpha_0^4 - \dots \right) \alpha^4 \\ &- \left(\frac{1}{8!} - \frac{1}{10!} \alpha_0^2 + \frac{1}{12!} \alpha_0^4 - \dots \right) \alpha^6 \\ &+ \dots \\ &+ (-1)^n \left(\frac{1}{2(n+1)!} - \frac{1}{2(n+2)!} \alpha_0^2 + \dots \right) \alpha^{2n} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Nous retrouvons la formule (12). Le calcul se termine comme dans la première méthode que nous avons vue.

La formule (8) qui donne la durée d'une oscillation simple suffit dans la pratique.

Une question qui se pose est celle de la forme des termes suivants du développement de T. Ces termes ont-ils aussi une forme symétrique ou non. Nous avons les premiers termes du développement de $\left(\frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2 - \alpha^2}\right)^2$; puis nous avons calculé une valeur approchée de l'intégrale $\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left(\frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2 - \alpha^2}\right)^2 \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}$. Nous avons obtenu l'expression

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left(\frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2 - \alpha^2}\right)^2 \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} = \pi \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} \alpha_0^2 + \frac{31}{2^9 \cdot 3^2} \alpha_0^4 - \frac{113}{2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5} \alpha_0^6 + \frac{2969}{2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7} \alpha_0^8 - \dots \right)$$

Nous ne trouvons aucune symétrie dans ces termes nous permettant d'écrire par induction les termes suivants.

La durée d'une oscillation simple du balancier sera donc, d'après la formule (10) dont on prend les trois premiers termes,

$$(23) \quad T = \pi \sqrt{\frac{M}{A}} \left\{ 1 - \frac{P\lambda}{M} \left[\frac{1}{2} - \frac{\alpha_0^2}{2^3 \cdot 2(1)^2} + \frac{\alpha_0^4}{2^9 \cdot 3(1 \cdot 2)^2} - \frac{\alpha_0^6}{2^7 \cdot 4(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \dots \right] + \frac{3}{2} \left(\frac{P\lambda}{M} \right)^2 \left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} \alpha_0^2 + \frac{31}{2^9 \cdot 3^2} \alpha_0^4 - \frac{113}{2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5} \alpha_0^6 + \frac{2969}{2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7} \alpha_0^8 - \dots \right] \right\}.$$

6. Nous considérons maintenant la série qui figure dans l'expression de la durée T d'une oscillation simple.

Comme on sait les fonctions de Bessel peuvent être définies par la formule

$$J_n(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}}{\pi(\nu) \pi(n+\nu)}.$$

Nous avons pour n égal à 1

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 2(1)^2} + \frac{x^5}{2^5 \cdot 2(1 \cdot 2)^2} + \dots$$

Nous avons donc

$$\frac{1}{2} - \frac{\alpha_0^2}{2^3 \cdot 2(1)^2} + \frac{\alpha_0^4}{2^5 \cdot 3 \cdot (1 \cdot 2)^2} - \dots = \frac{1}{\alpha_0} J_1(\alpha_0).$$

La formule (8) peut donc s'écrire

$$(24) \quad T = \pi \sqrt{\frac{A}{M}} \left[1 - \frac{P\lambda}{M\alpha_0} J_1(\alpha_0) \right].$$

Les valeurs des fonctions de Bessel étant données par des tables, la valeur d'une oscillation simple T pour une valeur α_0 s'obtiendra donc aisément.

7. Les fonctions de Bessel peuvent être définies aussi, comme on sait, par la formule

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \omega - n\omega) d\omega.$$

Si l'on fait $n = 1$, on a en particulier la formule

$$(25) \quad J_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \omega - \omega) d\omega.$$

Nous avons obtenu la valeur de $\frac{\pi}{\alpha_0} J_1(\alpha_0)$ par la formule

$$(26) \quad \frac{\pi}{\alpha_0} J_1(\alpha_0) = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{(\alpha_0^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} d\alpha.$$

Nous ramènerons les limites de l'intégrale à être égales à celles de l'intégrale précédente en posant

$$\alpha = -\alpha_0 \cos \omega.$$

La formule (26) nous donne, en remplaçant α_0 par x ,

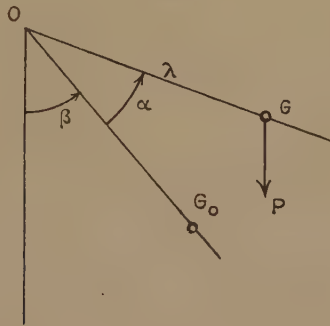
$$(27) \quad J_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(x \cos \omega) - \cos x}{x \sin^2 \omega} d\omega.$$

La fonction sous le signe d'intégration ne pouvant pas se ramener à celle se trouvant sous le signe d'intégration de la formule (25), nous avons obtenu une nouvelle définition de la fonction $J_1(x)$ de Bessel.

SECONDE PARTIE

8. Nous allons considérer maintenant le cas général où le centre de gravité du balancier ne se trouve pas sur la verticale passant par son centre, lorsque le ressort est détendu pendant son mouvement.

Fig. 2.



Nous appellerons β l'angle que forme la droite joignant le centre de gravité lorsque le balancier est dans cette position au centre O avec la verticale descendante (fig. 2). Nous désignerons de nouveau par α l'angle formé par la droite OG joignant le centre de gravité G dans une position quelconque avec le centre O avec la droite OG₀ faisant l'angle β avec la verticale. L'angle α représente l'angle dont a tourné le balancier depuis la position où le ressort est détendu. Les autres données restent les mêmes que dans le premier cas que nous avons étudié. L'équation du mouvement du balancier est alors la suivante

$$(28) \quad A \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -M\alpha - P\lambda \sin(\alpha + \beta).$$

Nous en déduisons, en supposant que pour $\alpha = \alpha_0$, on ait $\frac{d\alpha}{dt} = 0$,

$$(29) \quad A \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = M(\alpha_0^2 - \alpha^2) + 2P\lambda [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha_0 + \beta)].$$

La durée d'une oscillation simple pourra s'obtenir en calculant le temps que met le balancier pour passer de la position où la droite OG fait l'angle α_0 avec la droite OG₀ et dans laquelle la vitesse est nulle, à la position de OG où la vitesse est de nouveau nulle. Il faudrait donc obtenir une valeur de α différente de α_0 et qui annule le second membre de l'équation (29). Cette valeur diffèrera peu de $-\alpha_0$ et en posant $\alpha = -\alpha_0 - \varepsilon$, si l'on néglige les puissances de ε et de $P\lambda$ à partir de la deuxième, on a la valeur positive approchée de ε

$$\varepsilon = \frac{P\lambda [\cos(\alpha_0 - \beta) - \cos(\alpha_0 + \beta)]}{M\alpha_0}.$$

La durée d'une oscillation simple du balancier s'obtiendra donc en calculant l'intégrale

$$(30) \quad T = \sqrt{\frac{A}{M}} \int_{-\alpha_0 - \varepsilon}^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2 + \frac{2P\lambda}{M} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha_0 + \beta)]}}.$$

La différence $\alpha_0^2 - \alpha^2$ s'annule pour $\alpha = -\alpha_0$, tandis que le terme $\frac{2P\lambda}{M} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha_0 + \beta)]$ ne s'annule pas. On ne peut donc développer en série l'expression sous le signe d'intégration par rapport à $\frac{2P\lambda}{M}$ dans tout l'intervalle d'intégration $(-\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0)$. Nous obtiendrons une formule due à Ed. Phillips donnant une valeur approchée de la durée d'une oscillation simple du balancier par une autre méthode qui a été exposée par M. Jules Andrade dans son ouvrage « Chronométrie » et qui est basée sur la méthode de la variation des constantes. MM. Jules et Hermann Grosmann donnent dans leur ouvrage « Horlogerie théorique » la formule de Ed. Phillips sans calculs.

Nous étudierons d'abord le cas de très petites oscillations du balancier.

9. La formule (28) nous donne si l'on suppose l'angle α très petit

$$(31) \quad A \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -(M + P\lambda \cos \beta)\alpha - P\lambda \sin \beta.$$

L'intégrale de cette équation peut s'écrire

$$(32) \quad \alpha = \alpha_0 \sin \sqrt{\frac{M + P\lambda \cos \beta}{A}} (t - \theta) - \frac{P\lambda \sin \beta}{M + P\lambda \cos \beta}.$$

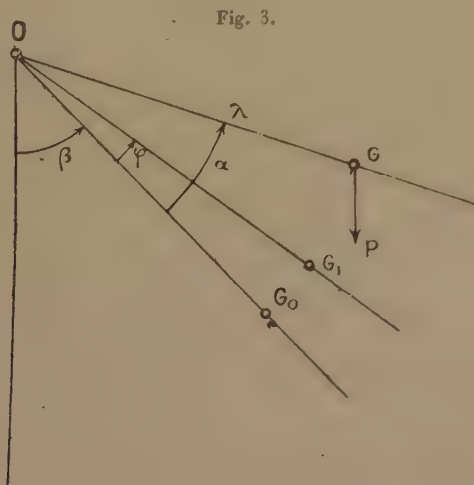
La constante α_0 est l'angle que décrit le balancier de part et d'autre de sa position dans laquelle le ressort est détendu, et θ une seconde constante. La durée d'une oscillation simple est donc

$$(33) \quad T = \pi \sqrt{\frac{A}{M + P\lambda \cos \beta}}.$$

Cette valeur peut s'écrire, en développant en série et en négligeant les valeurs de $\frac{P\lambda}{M}$ à partir de la deuxième

$$(34) \quad T = \pi \sqrt{\frac{A}{M}} \left(1 - \frac{P\lambda}{2M} \cos \beta \right).$$

40. Les formules que l'on obtient pour l'étude des très petites oscillations se simplifient si l'on considère le mouvement de part et d'autre de la position de repos du balancier.



Si l'on appelle β l'angle que fait la ligne OG_0 joignant le centre de gravité du balancier G_0 lorsqu'il est à l'état de repos à son centre O avec la verticale descendante (fig. 3), et α l'angle que fait avec cette droite la ligne OG_1 joignant le centre de gravité du

balancier lorsqu'il occupe la position G_1 dans laquelle le ressort est détendu au centre, l'équation du mouvement est alors

$$(35) \quad A \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -M(\alpha - \varphi) - P\lambda \sin(\alpha + \beta).$$

Dans la position de repos du balancier nous avons

$$M\varphi = P\lambda \sin \beta.$$

Nous avons donc l'équation simple pour de très petites oscillations

$$(36) \quad A \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -(M + P\lambda \cos \beta)\alpha.$$

L'intégrale peut s'écrire, α_0 désignant l'angle que décrit le balancier depuis sa position de repos et θ étant une seconde constante

$$(37) \quad \alpha = \alpha_0 \sin \sqrt{\frac{M + P\lambda \cos \beta}{A}} (t - \theta).$$

La durée d'une oscillation simple est donc la même que dans le cas particulier précédent et est donnée par la formule (33).

II. Nous considérons maintenant le cas général et nous cherchons une solution de l'équation (28) de la forme

$$(38) \quad \alpha = \alpha_0 \sin \sqrt{\frac{M}{A}} (t - \theta).$$

Nous supposons que α_0 et θ ne sont pas constants. Nous cherchons donc une solution de l'équation (28) par la méthode de la variation des constantes. Pour simplifier l'écriture nous poserons

$$(39) \quad \sqrt{\frac{M}{A}} (t - \theta) = u.$$

La formule (38) devient

$$(40) \quad \alpha = \alpha_0 \sin u.$$

La vitesse du balancier s'obtient en dérivant cette expression. Nous obtenons

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha_0}{dt} \sin u + \alpha_0 \sqrt{\frac{M}{A}} \cos u \left(1 - \frac{d\theta}{dt}\right).$$

Nous disposons de α_0 et de θ de manière que la vitesse soit donnée par une formule de la même forme que si ces deux quantités étaient constantes dans le but d'obtenir facilement deux valeurs de u qui annulent la vitesse. Nous posons donc

$$(41) \quad \frac{d\alpha_0}{dt} \sin u - \alpha_0 \sqrt{\frac{M}{A}} \frac{d\theta}{dt} \cos u = 0.$$

Les quantités α_0 et θ sont donc fonctions l'une de l'autre. La valeur de la vitesse est donnée par la formule

$$(42) \quad \frac{dx}{dt} = \alpha_0 \sqrt{\frac{M}{A}} \cos u.$$

La vitesse est nulle pour les valeurs données par la formule

$$u = (2k + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Nous remplaçons dans l'équation (28) α par sa valeur donnée par la formule (40) en tenant compte de la relation (41). Nous obtenons

$$(43) \quad \frac{d\alpha_0}{dt} \sqrt{\frac{M}{A}} \cos u + \alpha_0 \frac{M}{A} \frac{d\theta}{dt} \sin u = - \frac{P\lambda}{A} \sin(\alpha_0 \sin u + \beta).$$

Les formules (41) et (43) nous donnent

$$\frac{d\theta}{dt} = - \frac{P\lambda}{M\alpha_0} \sin(\alpha_0 \sin u + \beta) \sin u.$$

La valeur de $\frac{d\theta}{dt}$ est donc très petite, si l'on suppose $\frac{P\lambda}{M}$ très petit. Il en est de même de $\frac{d\alpha_0}{dt}$ qui est aussi exprimée par une expression de même forme.

La formule (39) nous donne

$$dt = \sqrt{\frac{A}{M}} du.$$

Nous avons donc, la valeur de α_0 pouvant être regardée comme constante si l'on néglige les puissances de $\frac{P\lambda}{M}$ à partir de la deuxième dans le développement de $\frac{d\theta}{dt}$ par rapport à $\frac{P\lambda}{M}$,

$$(44) \quad \theta = - \sqrt{\frac{A}{M}} \frac{P\lambda}{M\alpha_0} \int \sin(\alpha_0 \sin u + \beta) \sin u du + C.$$

Nous avons vu que les valeurs de u qui annulent la vitesse sont données par la formule $u = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$.

La durée d'une oscillation simple du balancier s'obtiendra en remplaçant dans la formule (39) la quantité u par deux de ces valeurs qui sont consécutives, $(2n + 1) \frac{\pi}{2}$ et $(2n + 3) \frac{\pi}{2}$ et en cherchant la différence des valeurs correspondantes de t . Si l'on appelle t_1 et $t_1 + T$ les valeurs de t , et θ_1 et θ_2 les valeurs correspondantes de θ , on aura donc pour la durée d'une oscillation simple du balancier la valeur

$$T = \pi \sqrt{\frac{A}{M}} + \theta_2 - \theta_1.$$

Les fonctions qui figurent sous le signe d'intégration dans l'expression de θ admettent la période 2π , on peut donc en soustrayant un multiple convenable de π ramener les limites d'intégration à être $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Nous aurons donc

$$\theta_2 - \theta_1 = -\sqrt{\frac{A}{M}} \frac{P\lambda}{M\alpha_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha_0 \sin u + \beta) \sin u \, du.$$

Cette relation peut s'écrire

$$\theta_2 - \theta_1 = -\sqrt{\frac{A}{M}} \frac{P\lambda}{M\alpha_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\sin(\alpha_0 \sin u) \cos \beta + \cos(\alpha_0 \sin u) \sin \beta] \sin u \, du.$$

La fonction $\cos(\alpha_0 \sin u) \sin u$ étant une fonction impaire, son intégrale entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ est nulle.

Nous avons donc

$$\theta_2 - \theta_1 = -\sqrt{\frac{A}{M}} \frac{P\lambda}{M\alpha_0} \cos \beta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha_0 \sin u) \sin u \, du.$$

Nous avons

$$\sin(\alpha_0 \sin u) \sin u = \frac{\alpha_0 \sin^2 u}{1} - \frac{\alpha_0^3 \sin^4 u}{3!} + \frac{\alpha_0^5 \sin^6 u}{5!} - \dots$$

Nous savons que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} u \, du = \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \pi.$$

Nous avons donc la formule

$$(45) \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha_0 \sin u) \sin u \, du \\ = \pi \left(\frac{\alpha_0}{2} - \frac{\alpha_0^3}{2^3 \cdot 2(1)^2} + \frac{\alpha_0^5}{2^5 \cdot 2(1 \cdot 2)^2} - \frac{\alpha_0^7}{2^7 \cdot 4(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \dots \right).$$

Nous obtenons pour la durée d'une oscillation simple du balancier la valeur

$$(46) \quad T = \pi \sqrt{\frac{A}{M}} \left\{ 1 - \frac{P\lambda}{M} \cos \beta \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{2} - \frac{\alpha_0^2}{2^3 \cdot 2(1)^2} + \frac{\alpha_0^4}{2^5 \cdot 3(1 \cdot 2)^2} - \frac{\alpha_0^6}{2^7 \cdot 4(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \dots \right] \right\}.$$

Nous retrouvons la formule (8) donnant la durée d'une oscillation simple lorsque le centre de gravité du balancier à l'état de repos se trouve sur la verticale passant par l'axe si l'on fait dans cette formule $\beta = 0$.

Nous retrouvons aussi la formule (34) donnant la durée d'une oscillation simple lorsqu'on suppose les oscillations du balancier très petites et que l'on néglige dans la formule (46) les termes contenant les puissances de α_0 .

12. La formule (46) nous donne une nouvelle définition de la fonction $J_1(x)$ de Bessel. Nous avons en effet

$$J_1(x) = \frac{1}{\pi x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x \sin u) \sin u \, du.$$

Cette formule est différente des formules (25) et (27).

La durée d'une oscillation simple du balancier est donc donnée par la formule simple

$$(47) \quad T = \pi \sqrt{\frac{A}{M}} \left[1 - \frac{P\lambda}{M\alpha_0} \cos \beta J_1(\alpha_0) \right].$$

Les valeurs de la fonction $J_1(x)$ étant données par des tables, la durée d'une oscillation simple s'obtiendra sans difficulté.

Vu et approuvé :

Paris, le 17 janvier 1925,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
M. MOLLIARD.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 17 janvier 1925,

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
PAUL APPELL.



